Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 21.02.2014.

Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(40%)(a) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određena tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

(60%)(b) Ako su P i Q redom, tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P, Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.

Zadatak br. 2

(25%) Dat je $\triangle ABC$. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

(25%) Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

(50%) Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

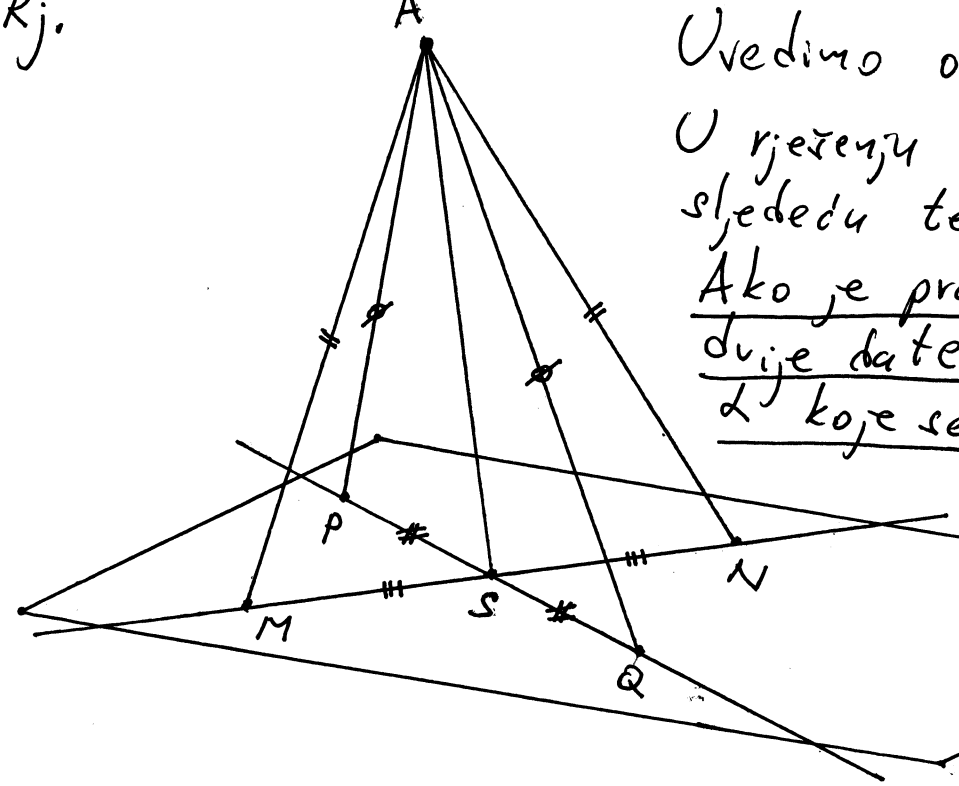
Zadatak br. 3

(30%) a) Nacrtati duž $x = \dfrac{\sqrt{3} + ab}{\sqrt{ab}} - 1$, gdje su a i b date duži ($a < 1 < b$).

(70%) b) Konstruisati krug koji prolazi kroz datu tačku i dodiruje dati krug i datu pravu (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi ali bodovat će se samo Analiza).

(#) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

U rješenju ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

<u>Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.</u> ...(*)

Posmatrajmo trouglove $\triangle AMS$ i $\triangle ANS$.

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong AN \\ MS \cong NS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle AMS \cong \triangle ANS$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASM \cong \measuredangle ASN$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(M,N)$ ...(1)

Posmatrajmo sad trouglove $\triangle APS$ i $\triangle AQS$.

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong AQ \\ PS \cong QS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle APS \cong \triangle AQS$$

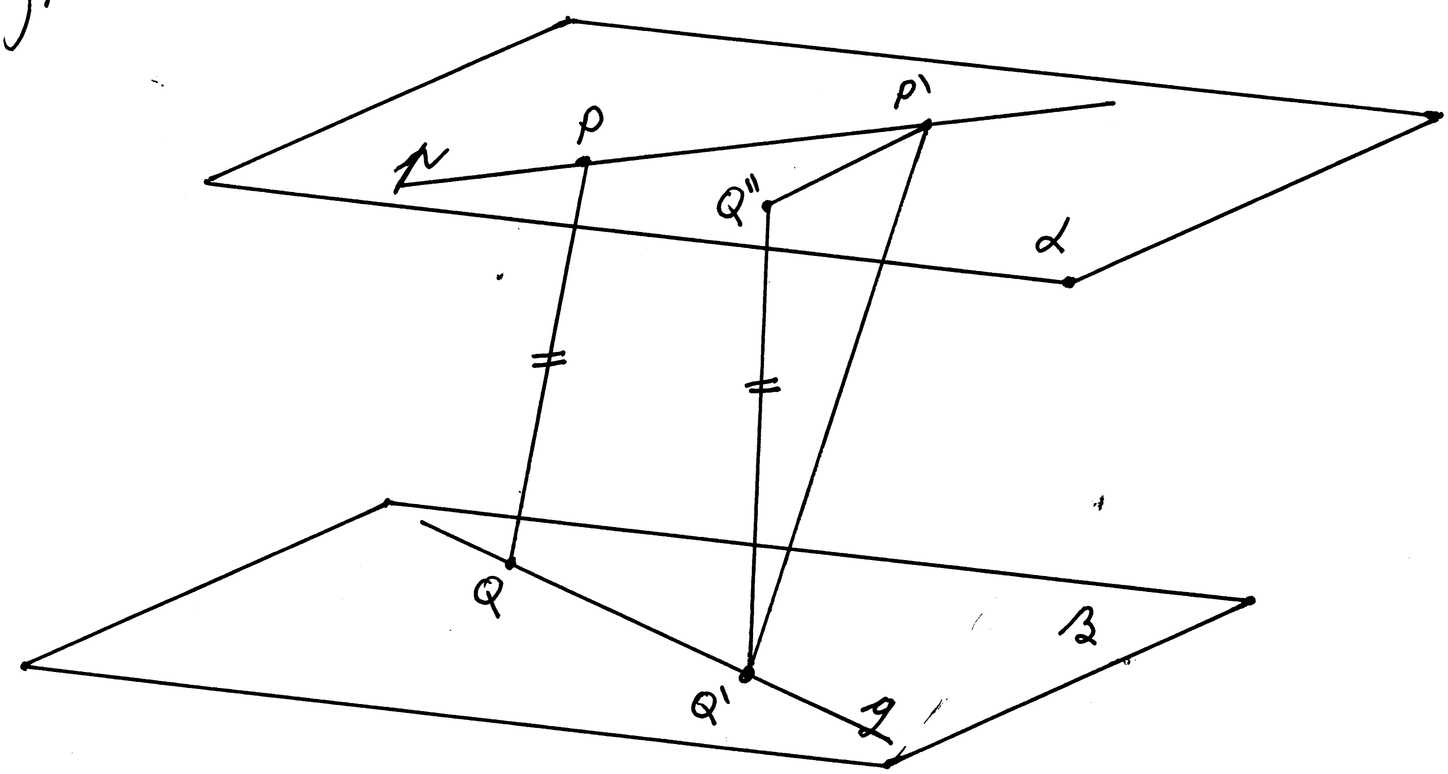
$$\Downarrow$$

$\measuredangle ASP \cong \measuredangle ASQ$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(P,Q)$ ...(2)

Prema (*), (1) i (2) $\Longrightarrow AS \perp \alpha$ q.e.d.

(#) Ako su P i Q redom tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.
Neka je α ravan koja je normalna na pravu $p(P,Q)$ i sadrži pravu p, a β ravan koja je normalna na pravoj $p(P,Q)$ i sadrži pravu q.
Neka su P' i Q' proizvoljne tačke redom pravih p i q. Trebamo pokazati da za slučaje kada je

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

uvijek imamo (uvijek vrijedi) da je $PQ < P'Q'$,

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

Trougao $\Delta PQP'$ je pravougli (sa pravim uglom kod tjemena P) pa je njegova hipotenuza (duž $P'Q$) duža od katete (duž PQ) tj. $PQ < P'Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

Trougao $\Delta PQQ'$ je pravougli (sa pravim uglom kod vrha Q) pa je njegova hipotenuza duža od katete tj. $PQ < PQ'$ (tj. $PQ < P'Q'$).

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

Neka je Q'' podnožje normale iz tačke Q' na ravan α.

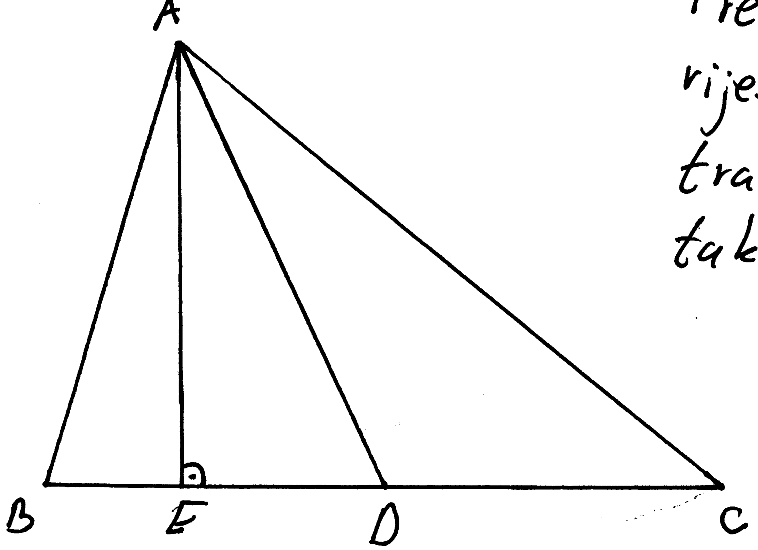
$Q'Q'' \perp \alpha$ i $\alpha \parallel \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp q$

$p \subseteq \alpha$ i $Q'Q'' \perp \alpha \Rightarrow Q'Q'' \perp p$

Tačke P' i Q'' su različite (u suprotnom prava $Q'Q''$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna, što je u kontradikciji sa teoremom: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih. (jer prava $n(P,Q)$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna i takva prava je na osnovu navedene teoreme jedinstvena). Prema tome P' i Q' su različite i $Q'Q'' \perp Q''P \Rightarrow \Delta P'Q'Q''$ pravougli $\Rightarrow Q'P' > Q'Q''$ a kako je $PQ \cong Q'Q'' \Rightarrow PQ < P'Q'$

(#) Dat je $\triangle ABC$. Kroz vrh A konstruisati pravu koja će dati trougao podijeliti na dva trougla sa jednakim površinama.

Rj. <u>Analiza</u>



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(A,D)$ tražena prava ($D \in BC$) takva da je $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ADC}$.

Posmatrajmo trouglove $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$.

Ako spustimo visinu iz A u oba ova trougla (npr AE je visina) imamo:

$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ADC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\frac{|AE| \cdot |BD|}{2} = \frac{|AE| \cdot |DC|}{2}$$

$$|BD| = |DC|$$

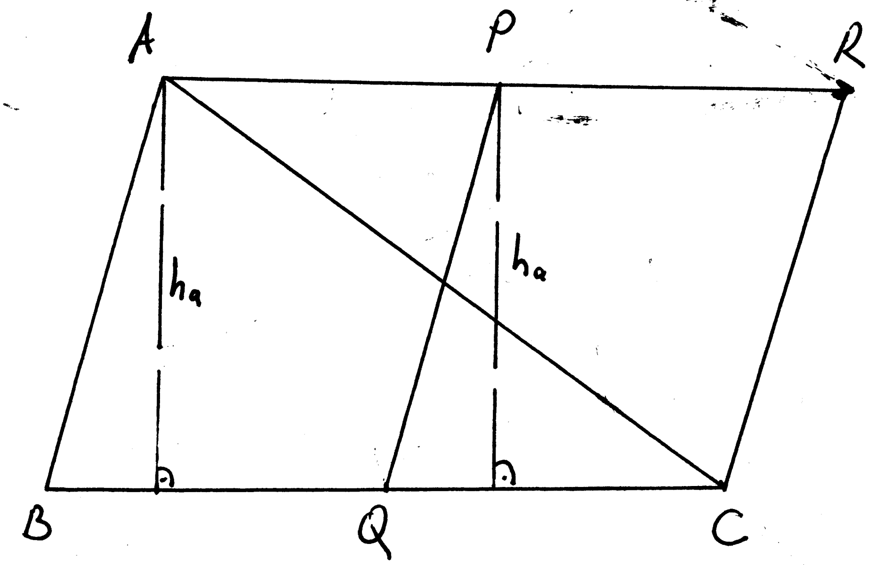
Prema tome D je sredina stranice BC, pa traženu pravu nije teško konstruisati.

Konstruisati paralelogram čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati trougao i neka je $\square QCRP$ traženi paralelogram (gdje je $Q \in BC$ i gdje $A \in p(P,R)$).



$$P_{\Delta ABC} = \frac{h_a \cdot a}{2}$$

$$P_{\square QCPR} = h_a \cdot |QC|$$

Kako je površina ΔABC jednaka površini četverougla $\square PQCR$ to je $\frac{h_a \cdot |BC|}{2} = h_a \cdot |QC|$

$|BC| = 2 \cdot |QC| \Rightarrow Q$ je na sredini od BC

Kakve osobine treba da ima tačka P?

Primjetimo da za proizvoljnu tačku P t.d. $p(P,R) \parallel p(QC)$ i da je P na udaljenosti h_a od $p(Q,C)$ imamo da je

$$P_{\Delta ABC} = P_{\square QCRP}$$

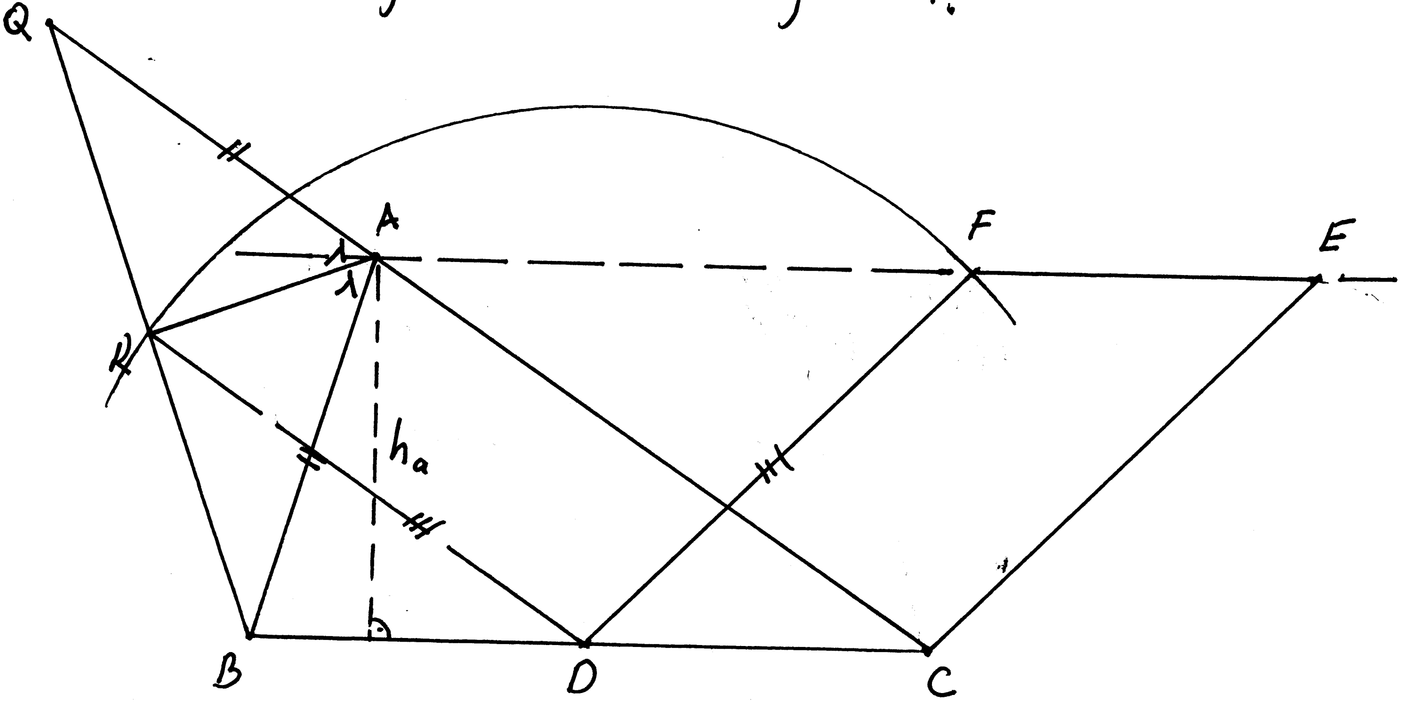
Dati paralelogram sad nije teško konstruisati.

Konstruisati paralelogram čija će površina i obim biti jednaki površini i obimu datog trougla.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\square DCEF$ traženi paralelogram, čiji su obim i površina jednaki površini datog ΔABC, i gdje su $D \in BC$, $F, E \in p(A,E)$ i $p(A,E) \parallel p(B,C)$. Ako sa h_a označimo visinu iz vrha A ΔABC tada imamo

$$P_{\Delta ABC} = P_{\square DCEF} \Rightarrow \frac{|BC| \cdot h_a}{2} = |DC| \cdot h_a \Rightarrow |BC| = 2|DC| \Rightarrow D \text{ sredina stranice } BC$$

Tada $BC = BD + CD = DC + EF$. Kako su obimi jednaki tačke F i E moraju imati osobinu da je $\overbrace{DF + CE}^{=2DF} = AB + AC$. Produžimo duž CA do tačke Q t.d. $AQ \cong AB$ i neka je AR simetrala ugla $\measuredangle BAQ$. Prema podudarnosti SUS imamo da je $\Delta QAR \cong \Delta BAR$

$\Downarrow$

$BR \cong RQ \Rightarrow R$ je sredina BQ

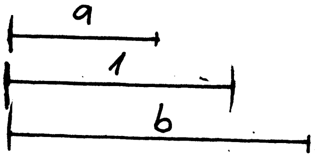
tj. DR je srednja linija ΔBCQ

$DR = \frac{1}{2} QC = \frac{1}{2}(AB + BC)$

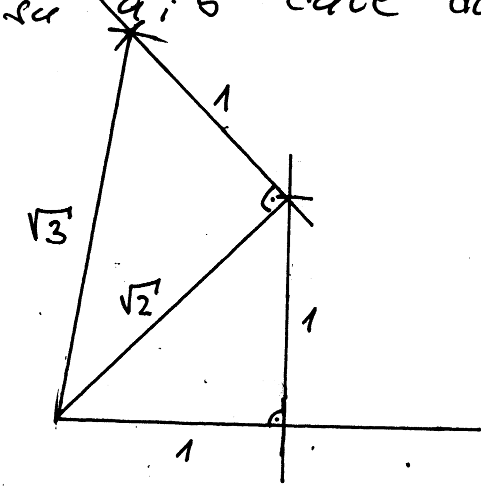
Paralelogram $\square DCEF$ nije teško konstr.

(#) Nacrtati duž $x=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$ gdje su a i b date duži $(a<1<b)$.

Rj.



Nacrtajmo duž $\sqrt{3}$.

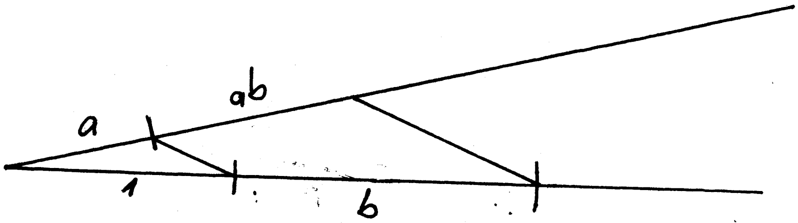


Nacrtajmo duž ab.

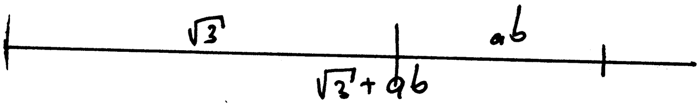
$Y=a\cdot b$

$\frac{Y}{a}=\frac{b}{1}$

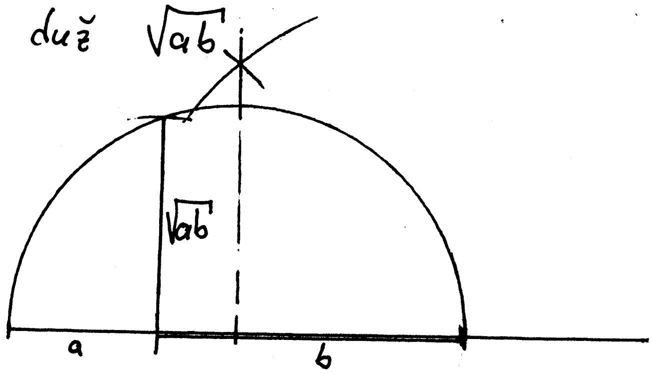
$\frac{1}{b}=\frac{a}{Y}$



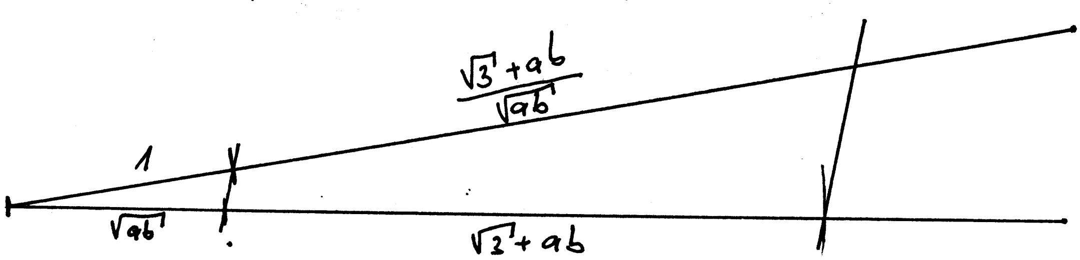
Nacrtajmo duž $\sqrt{3}+ab$



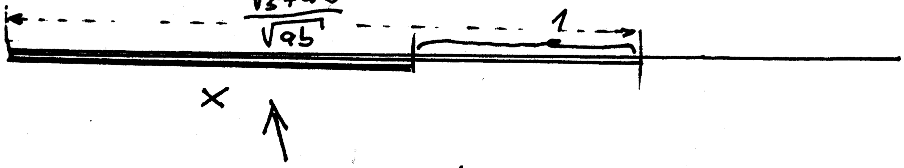
Nacrtajmo duž $\sqrt{ab}$



Nacrtajmo duž $\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}$. $\quad z=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}+ab}=\frac{1}{z}$



Na kraju nacrtajmo duž $x=\frac{\sqrt{3}+ab}{\sqrt{ab}}-1$



traženu duž